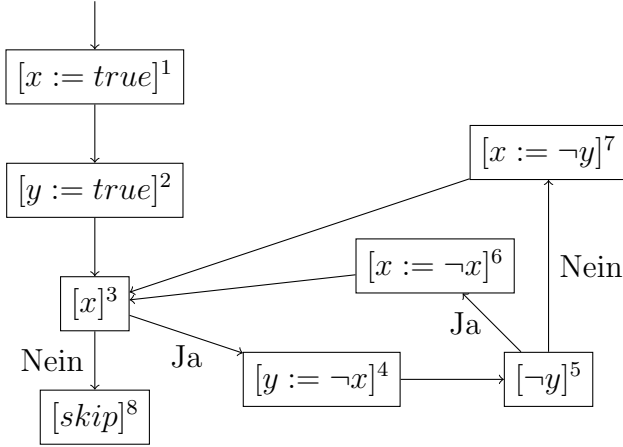


Aufgabe 1

a)



b)

Block	$kill(b)$	$gen(b)$	$f_b(X)$
$[x := true]^1$	$\{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}$	$\{(x, 1)\}$	$(X \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}) \cup \{(x, 1)\}$
$[y := true]^2$	$\{(y, ?), (y, 2), (y, 4)\}$	$\{(y, 2)\}$	$(X \setminus \{(y, ?), (y, 2), (y, 4)\}) \cup \{(y, 2)\}$
$[x]^3$	$\emptyset$	$\emptyset$	X
$[y := \neg x]^4$	$\{(y, ?), (y, 2), (y, 4)\}$	$\{(y, 4)\}$	$(X \setminus \{(y, ?), (y, 2), (y, 4)\}) \cup \{(y, 4)\}$
$[\neg y]^5$	$\emptyset$	$\emptyset$	X
$[x := \neg x]^6$	$\{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}$	$\{(x, 6)\}$	$(X \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}) \cup \{(x, 6)\}$
$[x := \neg y]^7$	$\{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}$	$\{(x, 7)\}$	$(X \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}) \cup \{(x, 7)\}$
$[skip]^8$	$\emptyset$	$\emptyset$	X

c)

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \{(x, ?), (y, ?)\} \\
 X_2 &= (X_1 \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}) \cup \{(x, 1)\} \\
 X_3 &= ((X_2 \setminus \{(y, ?), (y, 2), (y, 4)\}) \cup \{(y, 2)\}) \cup ((X_6 \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}) \cup \{(x, 6)\}) \\
 &\quad \cup ((X_7 \setminus \{(x, ?), (x, 1), (x, 6), (x, 7)\}) \cup \{(x, 7)\}) \\
 X_4 &= X_3 \\
 X_5 &= (X_4 \setminus \{(y, ?), (y, 2), (y, 4)\}) \cup \{(y, 4)\} \\
 X_6 &= X_5 \\
 X_7 &= X_5 \\
 X_8 &= X_3
 \end{aligned}$$

d)

Aufgabe 2

a)

Sei $A = (Q_A, \Sigma_A, \delta_A, q_{0A}, F_A)$ ein endlicher Automat mit:

- Q_A ist die Zustandsmenge
- Σ_A ist das Eingabealphabet
- $\delta_A : Q_A \times \Sigma_A \rightarrow Q_A$ ist die Übergangsfunktion
- $q_{0A} \in Q_A$ ist der Startzustand
- $F_A \subseteq Q_A$ ist die Menge der akzeptierenden Zustände

Sei $M = (Q_M, \Sigma_M, \Gamma_M, \delta_M, q_{0M})$ eine DTM, die den Automaten A simuliert, mit:

- $Q_M = Q_A \cup \{q_{acc}, q_{rej}\}$ ist die Zustandsmenge
- $\Sigma_M = \Sigma_A$ ist das Eingabealphabet
- $\Gamma_M = \Sigma_M \cup \{\$, _\}$
- $\delta_M : Q_M \times \Gamma_M \rightarrow Q_M \times \Gamma_M \times \{L, R\}$ ist die Übergangsfunktion
- $q_{0M} = q_{0A}$ ist der Startzustand

Für alle Transitionen des Automaten definieren wir jetzt passende Transitionen der DTM:

$$\delta : \forall (q, \sigma) \mapsto (q'); q, q' \in Q_A; \sigma \in \Sigma_A : (q, \gamma) \mapsto (q', \gamma, L)$$

Nun gilt es noch die akzeptierenden Zustände F_M des Automaten am Ende des Wortes in q_{rej} zu überführen, dafür fügen wir folgendes zu δ :

$$\forall f \in F_A : (f, _) \mapsto (q_{acc}, _, R)$$

Für alle anderen Zustände des Automaten $Q \setminus F$ fügen wir bei Erreichen des Wortendes noch eine Transition zu q_{rej} zu δ hinzu:

$$\forall q \in Q \setminus F : (q, _) \mapsto (q_{rej}, _, R)$$

Somit ist M eine DTM, die einen beliebigen endlichen Automaten A simuliert. Die Definition der Übergänge weg von q_{acc} und q_{rej} können wir uns an dieser Stelle sparen, da sie sowieso nie erreicht werden. Mit der Konstruktion der DTM M ist auch gezeigt, dass es zu jeder regulären Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ eine DTM gibt, die diese Akzeptiert.

b)

Die von M akzeptierte Sprache $\mathcal{L} \subseteq \{a, b, \#\}$ ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{L} = \{w \in \{a, b, \#\}^* \mid v \in \{a, b\}^* \mid w = v\#v\}$$

Die Funktionsweise ist dabei wie folgt, die TM sucht nach dem ersten $x \in \{a, b, \#, X, _, \$\}$, dass nicht X oder $\$$ ist (q_0). Wurde ein $_$ gefunden wechselt die TM in den akzeptierenden Zustand (q_{acc}), wurde ein $\#$ gefunden sucht die TM nach $_$, Die Funktionsweise ist dabei wie folgt:

Die TM iteriert nach links, bis ein Symbol $x \notin \{\$, X\}$ auf dem Band steht (q_0).

- Wenn ein $_$ gefunden wurde wechselt die TM in den abweisenden Zustand (q_{rej}).
- Wenn ein $\#$ gefunden wurde iteriert die TM weiter nach Links, wobei zwei Dinge eintreten können:
 - $_$ wurde gefunden, dann wechselt die TM in den akzeptierenden Zustand (q_{acc}).
 - irgend ein anderes Zeichen wird gelesen, dann wechselt die TM in den abweisenden Zustand (q_{rej}).
- wenn ein a gefunden wurde iteriert die TM weiter nach rechts (q_{seena}), bis:
 - ein $_$ gefunden wurde, dann wechselt die TM in den abweisenden Zustand (q_{rej}).
 - ein $\#$ gefunden wurde, dann iteriert die TM weiter nach links (q_{finda}), bis:
 - * ein a gefunden wurde, dann iteriert die TM wieder nach links, bis zum Anfang und es geht oben wieder los (q_{reset}).
 - * irgend ein anderes Zeichen wird gelesen, dann wechselt die TM in den abweisenden Zustand (q_{rej}).
- wenn ein b gefunden wurde sind die Ereignisse analog zu a nur über die Zustände q_{seenb} und q_{findb} .

Aufgabe 3

$M = \{ \{q_0, q_{acc}, q_{rej}, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{a, b, X, _, \$\}, \delta, q_0 \}$
 $\delta :$

$(q_0, X) \mapsto (q_0, X, R)$
 $(q_0, a) \mapsto (q_1, X, R)$
 $(q_0, _) \mapsto (q_{acc}, _, R)$
 $(q_0, b) \mapsto (q_{rej}, b, R)$
 $(q_0, c) \mapsto (q_{rej}, c, R)$
 $(q_1, X) \mapsto (q_1, X, R)$
 $(q_1, a) \mapsto (q_1, a, R)$
 $(q_1, b) \mapsto (q_3, X, R)$
 $(q_1, _) \mapsto (q_{rej}, _, R)$
 $(q_1, c) \mapsto (q_{rej}, c, R)$
 $(q_2, X) \mapsto (q_2, X, R)$
 $(q_2, b) \mapsto (q_2, b, R)$
 $(q_2, c) \mapsto (q_3, X, L)$
 $(q_2, a) \mapsto (q_{rej}, a, R)$
 $(q_2, _) \mapsto (q_{rej}, _, R)$
 $(q_3, a) \mapsto (q_3, a, L)$
 $(q_3, b) \mapsto (q_3, b, L)$
 $(q_3, c) \mapsto (q_3, c, L)$
 $(q_3, X) \mapsto (q_3, X, L)$
 $(q_3, _) \mapsto (q_3, _, L)$
 $(q_3, \$) \mapsto (q_0, \$, R)$

Funktionsweise:

Die TM iteriert solange sie X sieht nach rechts (q_0), ersetzt das erste a durch ein X , iteriert solange sie a oder X sieht weiter nach rechts (q_1), ersetzt das erste b durch ein X , iteriert solange sie b oder X sieht weiter nach rechts (q_2), ersetzt das erste c durch ein X , iteriert nach links zurück an den Anfang (q_3) und beginnt von vorne. Wenn die TM beim iterieren auf der Suche nach einem a (q_0) ein $_$ sieht geht sie in den akzeptierenden Zustand (q_{acc}), falls ein unerwarteter Buchstabe vom Band gelesen wird geht sie in den ablehnenden Zustand (q_{rej}). Da $0 \in \mathbb{N}$ ist auch das leere Wort ϵ Teil der Sprache. Die Formale Definition der Übergänge weg von q_{acc} und q_{req} habe ich mit erspart, da diese sowieso nie erreicht werden.

Aufgabe 4

Beweisidee:

Eine TM M , die eine TM $M_{\leftrightarrow}$ simuliert speichert statt einzelner Buchstaben $x \in \Sigma$ ein 2-Tupel $(x, y) : x, y \in \Sigma$ wobei:

x ist der Inhalt der rechten Seite des Bandes von $M_{\leftrightarrow}$

y ist der Inhalt der linken Seite des Bandes von $M_{\leftrightarrow}$

Welche Position des Tupels dabei gelesen/geschrieben werden soll wird dabei im Zustands definiert.

Beweis:

Sei $M = \{Q_M, \Sigma_M, \Gamma_M, \delta_M, q_{0_M}\}$ eine TM, die eine TM $M_{\leftrightarrow}$ simuliert, mit:

- $Q_M = \{\forall q \in Q_{M_{\leftrightarrow}} : q, q'\}$ wobei q' der gespiegelte Zustand zu q ist
- $\Sigma_M = \Sigma_{M_{\leftrightarrow}}$
- $\Gamma_M = \Gamma_{M_{\leftrightarrow}} \cup \{\$ \}$
- $q_{0_M} = q_{0_{M_{\leftrightarrow}}}$
- δ wobei alle Transitionen auch auf die gespiegelten Zustände q' gespiegelt werden, sodass:

$$(q, \gamma) \mapsto (q_{\rightarrow}, \gamma, L) \implies (q', (\gamma,)) \mapsto (q_{\rightarrow}, (\gamma,), L) \cup (q', (, \gamma)) \mapsto (q_{\rightarrow}, (, \gamma), R)$$

$$(q, \gamma) \mapsto (q_{\rightarrow}, \gamma, R) \implies (q', (\gamma,)) \mapsto (q_{\rightarrow}, (\gamma,), R) \cup (q', (, \gamma)) \mapsto (q_{\rightarrow}, (, \gamma), L)$$

Und δ muss für jeden Zustand noch um die folgende Transition erweitert werden:

$\forall q, q' \in Q : (q, (\$, \$)) \mapsto (q', (\$, \$), R) \cup (q', (\$, \$)) \mapsto (q, (\$, \$), R)$ wobei q' wieder der gespiegelte Zustand zu q ist.

Somit haben wir die TM $M_{\leftrightarrow}$ einmal gespiegelt, wobei alle Transitionen im gespiegelten Teil genau in die entgegengesetzte Richtung auf dem Band laufen und im gespiegelten Teil immer der zweite Teil des gespeicherten 2-Tupels gelesen/geschrieben wird. Zudem haben wir für jeden Zustand, der \$ liest, und somit die Mitte des Bandes überschreiben würde, eine Transition in den entsprechenden gespiegelten Zustand definiert. Somit wechselt die TM M bei jedem potentiellen Mitten-Übertritt die Spiegelseite, und läuft dann entsprechend wieder auf dem Band zurück.